

Tema 4

Análisis de circuitos

Bibliografía

- A.J. CONEJO, A. CLAMAGIRAND, J.L. POLO, N. ALGUACIL. "CIRCUITOS ELÉCTRICOS PARA LA INGENIERÍA". MC-GRAW HILL, 2004
- J. W. NILSSON, S.A. RIEDEL. "ELECTRIC CIRCUITS". SIXTH EDITION. ADDISON-WESLEY READING, 1996

Objetivos

- **Identificar un conjunto apropiado de tensiones de nudo y escribir las ecuaciones correspondientes**
- **Identificar un conjunto apropiado de corrientes de malla y escribir las ecuaciones correspondientes**
- **Calcular todas las variables en un circuito conocidas las tensiones de nudo o las corrientes de malla**

Contenidos

- **Definiciones**
- **Ecuaciones a resolver**
- **Método de tensiones de nudo**
 - **Pasos**
 - **Expresión matricial**
 - **Fuentes dependientes**
 - **Supernudos**
- **Método de corrientes de malla**
 - **Pasos**
 - **Expresión matricial**
 - **Fuentes dependientes**
 - **Supermallas**
- **¿Nudos o mallas?**

Introducción

Pasos en el análisis de circuitos:

- 1. Identificar el modelo matemático de cada elemento**
- 2. Definir las variables de interés (corrientes, tensiones,...)**
- 3. Plantear las ecuaciones correspondientes**
- 4. Resolver el sistema de ecuaciones**
- 5. Evaluar el comportamiento del circuito**

Definiciones

- **Rama:** conjunto de elementos en serie que conecta dos terminales
- **Nudo:** punto de unión de 3 o más ramas
- **Camino:** conjunto de elementos contiguos sin que ninguno se repita
- **Bucle:** camino cuyo nudo inicial y final coinciden (camino cerrado)
- **Malla:** bucle que no encierra ningún otro bucle

Definiciones

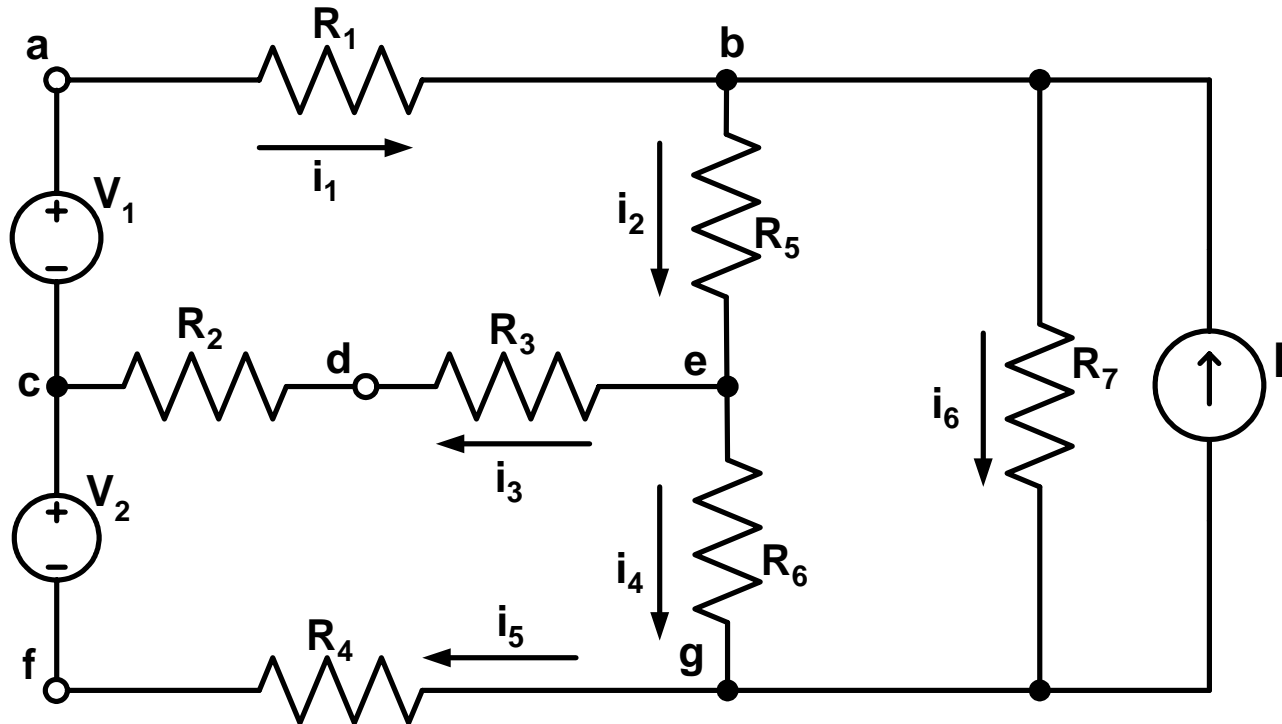
Nudo: b

Camino: v_1 - R_1 - R_5 - R_6

Rama básica: v_1 - R_1

Bucle: v_1 - R_1 - R_5 - R_6 - R_4 - V_2

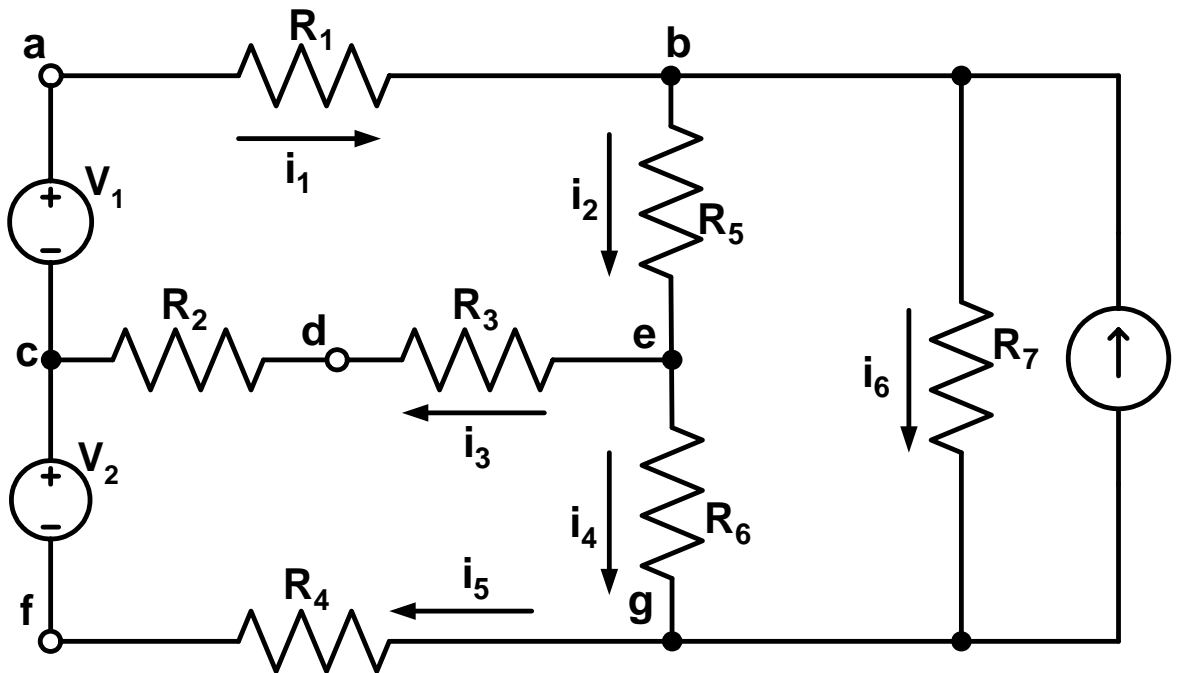
Malla: v_1 - R_1 - R_5 - R_3 - R_2



Ecuaciones

- **Número de nudos: n**
- **Número de ramas: r**
- **Incógnitas: r corrientes (una por rama)**
- **Ecuaciones:**
 - ✓ **$n-1$: LKC aplicada a $n-1$ nudos**
 - ✓ **$r-(n-1)$: LKT aplicada a $r-(n-1)$ bucles o mallas**

Ejemplo 4.1



LKC a 3 (b,c,e) de los 4 nudos

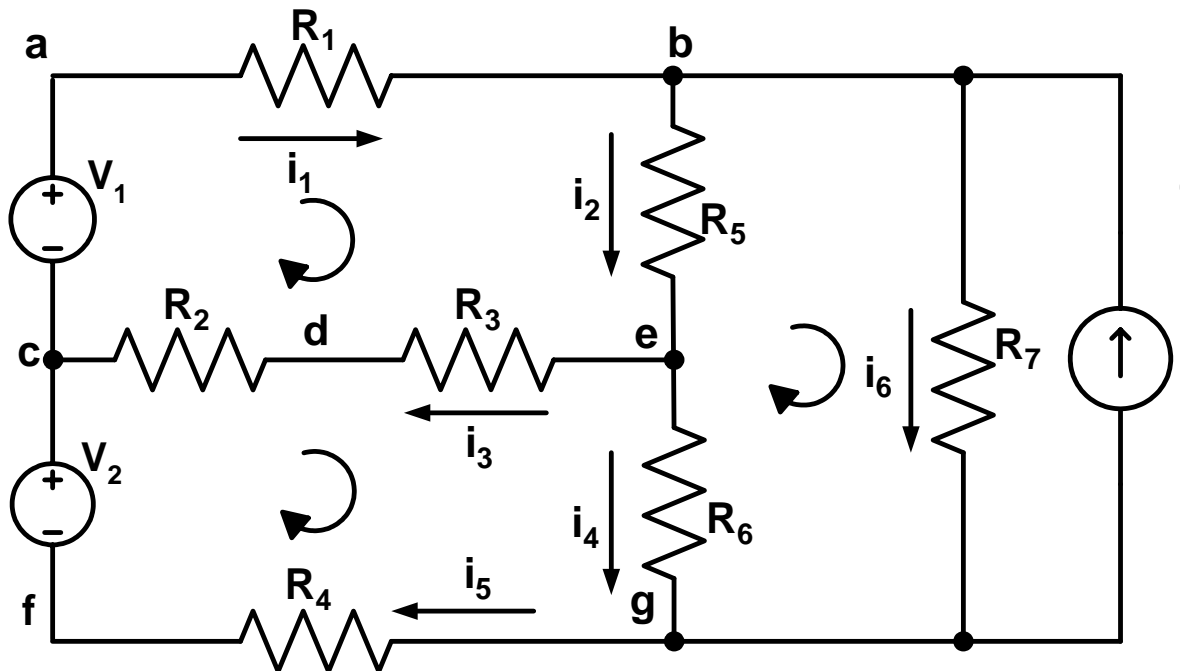
$$n = 4, r = 6$$

$$-i_1 + i_2 + i_6 - I = 0$$

$$i_1 - i_3 - i_5 = 0$$

$$i_3 + i_4 - i_2 = 0$$

Ejemplo 4.1 (I)



LKT a 3 mallas
(abedca, fcdegf, begb)

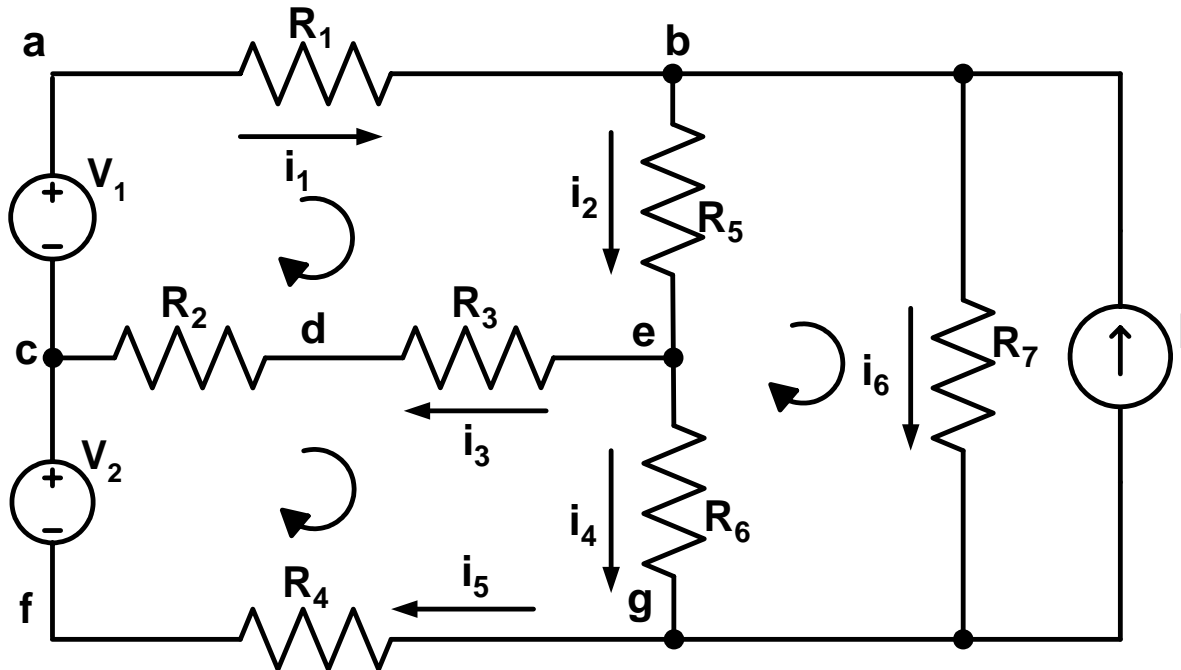
6 ecuaciones y 6 incógnitas

$$-v_1 + i_1 R_1 + i_2 R_5 + i_3 (R_2 + R_3) = 0$$

$$-v_2 - i_3 (R_2 + R_3) + i_4 R_6 + i_5 R_4 = 0$$

$$-i_4 R_6 - i_2 R_5 + i_6 R_7 = 0$$


Ejemplo 4.1 (II)



LKC aplicada al nudo “g”: $i_5 - i_4 - i_6 + I = 0$

que no es independiente (se obtiene sumando las 3 ecuaciones de corriente previas)

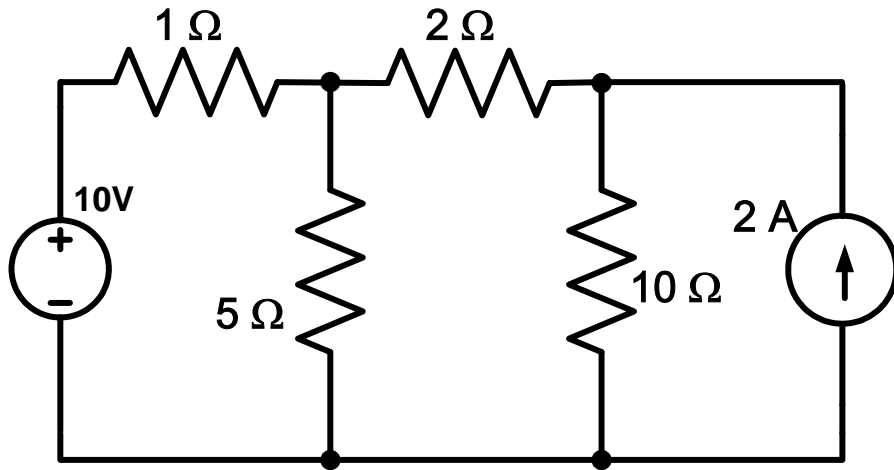
Método de las tensiones de nudo

- Se identifican los nudos del circuito (n)
- Un nudo se emplea como nudo de referencia y se denota mediante un símbolo 
- Las *tensiones de nudo* son las tensiones de cada nudo (distinto del de referencia) con respecto al nudo de referencia
- Son necesarias $n-1$ ecuaciones. Se emplea la LKC en los $n-1$ nudos distintos del de referencia
- Conocidas las tensiones de nudo, las corrientes de rama se calculan de forma sencilla

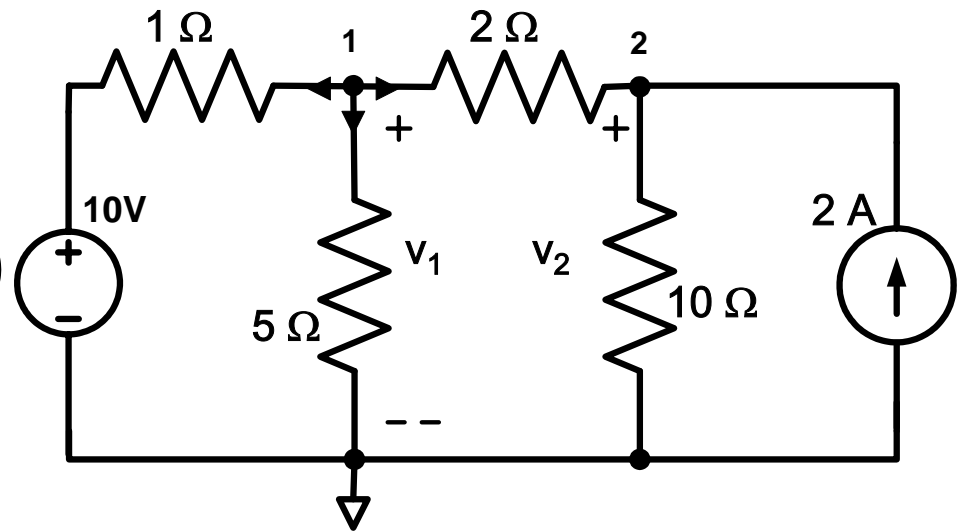
Pasos

- **Elegir el nudo de referencia**
- **Establecer las $n-1$ tensiones de nudo**
- **Escribir la LKC en cada nudo (distinto del de referencia)**
- **Resolver el sistema y obtener las tensiones de nudo**
- **Calcular las corrientes de rama**

Ejemplo 4.2



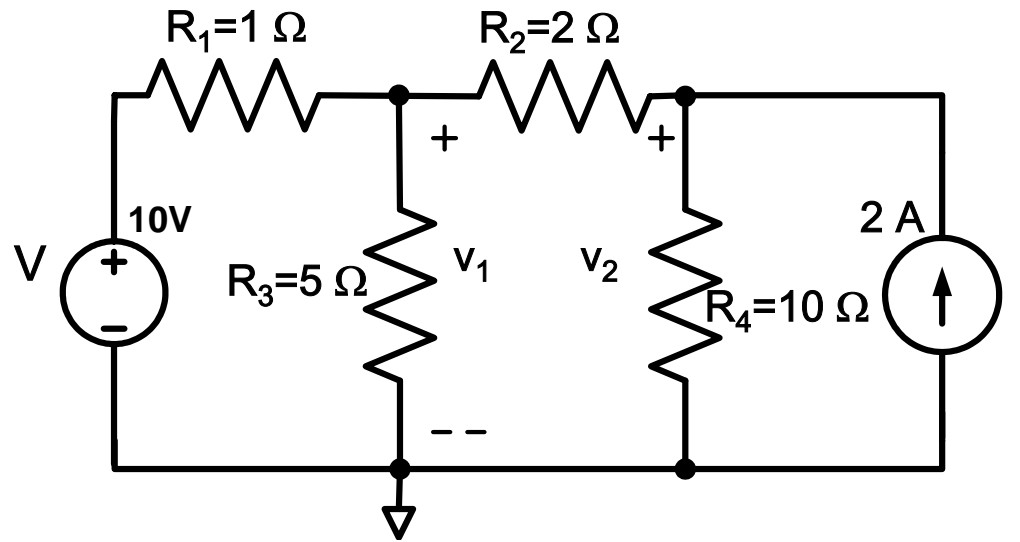
(Corriente que sale del nudo: corriente positiva)



$$\frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{v_1 - 10}{1} + \frac{v_1}{5} = 0$$

$$\frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_2}{10} - 2 = 0$$

Método de tensiones de nudo



$$\begin{cases} \frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_1 - V}{R_1} + \frac{v_1}{R_3} = 0 \\ \frac{v_2 - v_1}{R_2} + \frac{v_2}{R_4} - I = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + v_2 \left(-\frac{1}{R_2} \right) = \frac{V}{R_1} \\ v_1 \left(-\frac{1}{R_2} \right) + v_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) = I \end{cases}$$

Método de tensiones de nudo

Expresión matricial

Matriz de conductancias de nudos:

- El elemento de la diagonal ii es la suma de las conductancias que inciden en el nudo i
- El elemento no diagonal ij tiene el valor de la conductancia entre los nudos i y j cambiada de signo

Método de tensiones de nudo

Expresión matricial

Matriz de conductancias de nudo \rightarrow

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V}{R_1} \\ I \end{bmatrix}$$

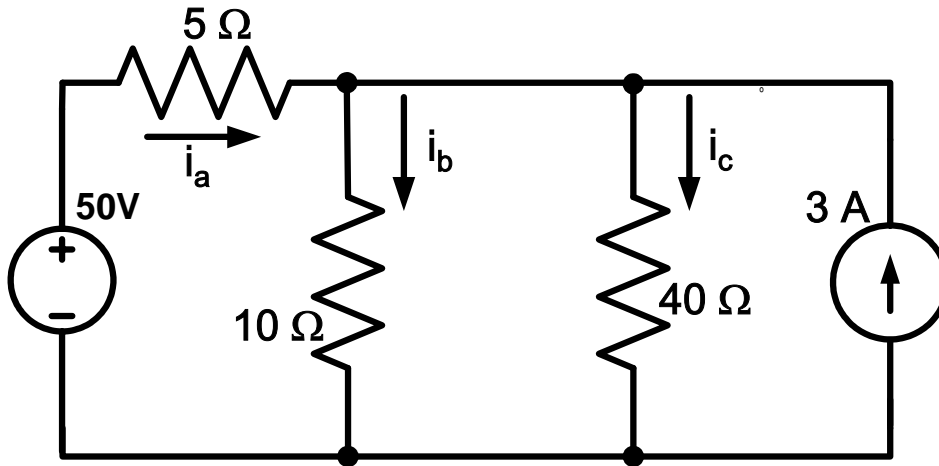
Vector de tensiones de nudo \uparrow

Vector de corrientes de nudo \leftarrow

Ley de formación sencilla:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{V}{R_1} \\ I \end{bmatrix}$$

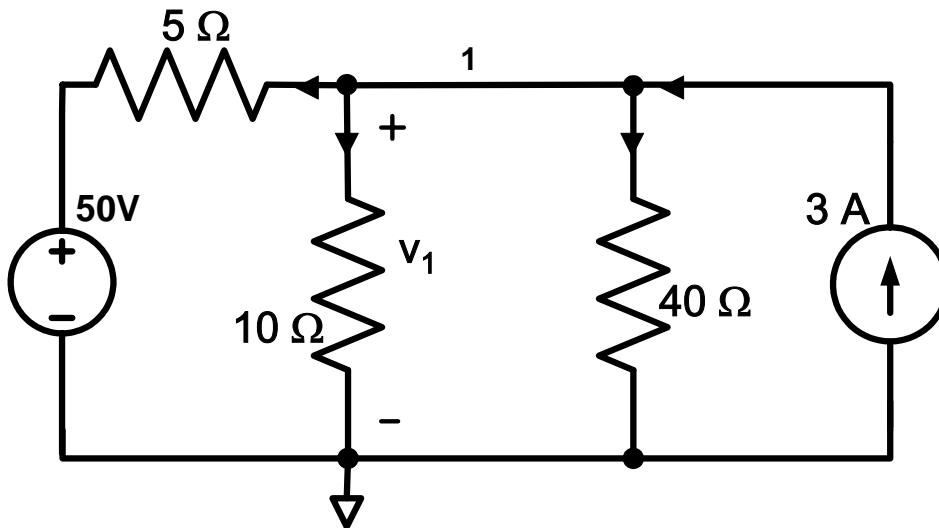
Ejemplo 4.3



$$\frac{v_1 - 50}{5} + \frac{v_1}{10} + \frac{v_1}{40} - 3 = 0 \Rightarrow v_1 = 40 \text{ V}$$

$$i_a = \frac{50 - 40}{5} = 2 \text{ A}$$

$$i_b = \frac{40}{10} = 4 \text{ A}, \quad i_c = \frac{40}{40} = 1 \text{ A}$$



Generación :

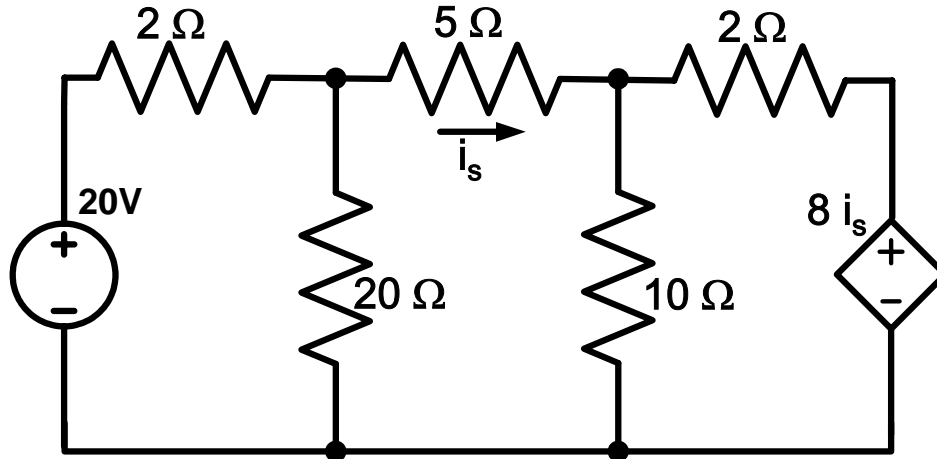
$$p_{50V} = 50i_a = 100 \text{ W}$$

$$p_{3A} = 3V_1 = 120 \text{ W}$$

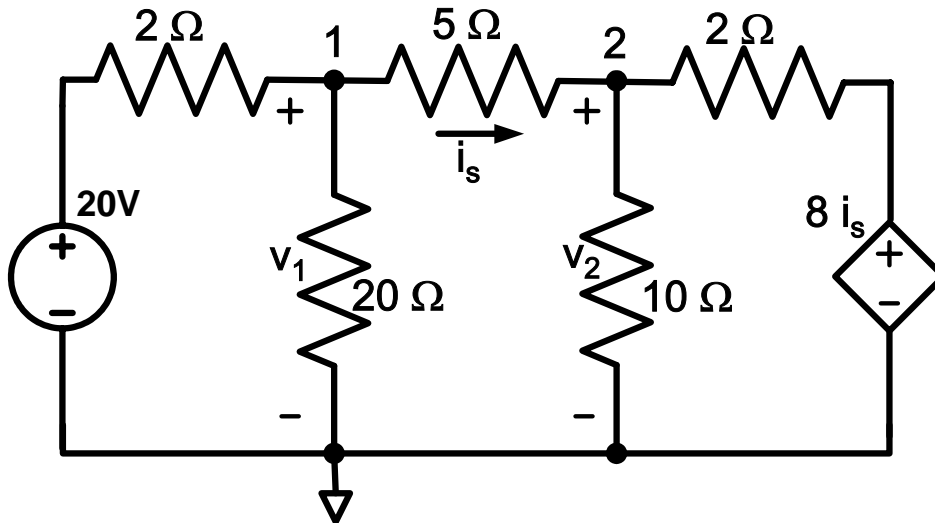
Consumo :

$$i_a^2 \times 5 + i_b^2 \times 10 + i_c^2 \times 40 = 220 \text{ W}$$

Método de tensiones de nudo: fuentes dependientes



Añadir a las ecuaciones de tensiones de nudo las ecuaciones asociadas a las fuentes dependientes



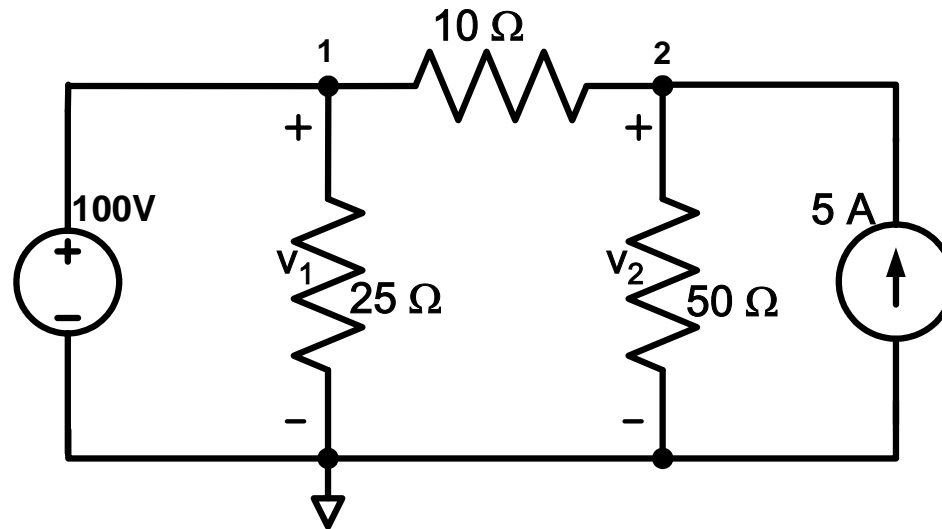
$$\frac{v_1 - 20}{2} + \frac{v_1}{20} + \frac{v_1 - v_2}{5} = 0$$

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{10} + \frac{v_2 - 8i_s}{2} = 0$$

$$\frac{v_1 - v_2}{5} = i_s$$

Método de las tensiones de nudo

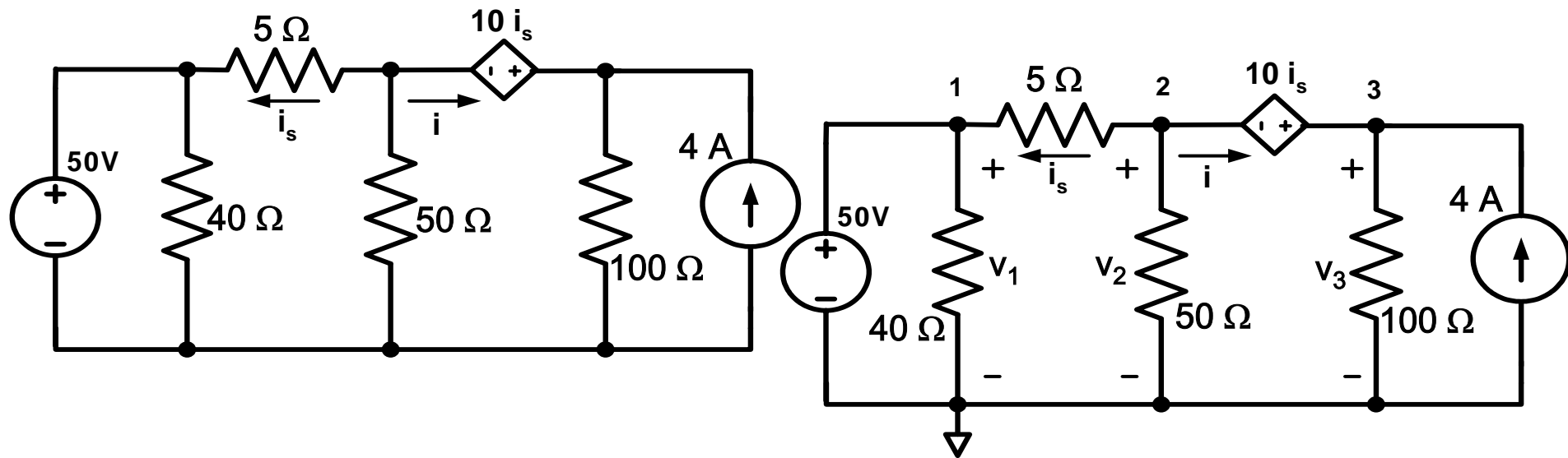
Fuente de tensión independiente conectada entre un nudo cualquiera y el de referencia
 \Rightarrow tensión de nudo conocida



$$v_1 = 100$$

$$\frac{v_2 - v_1}{10} + \frac{v_2}{50} - 5 = 0$$

Método de tensiones de nudo: supernudo



(1) $v_1 = 50$

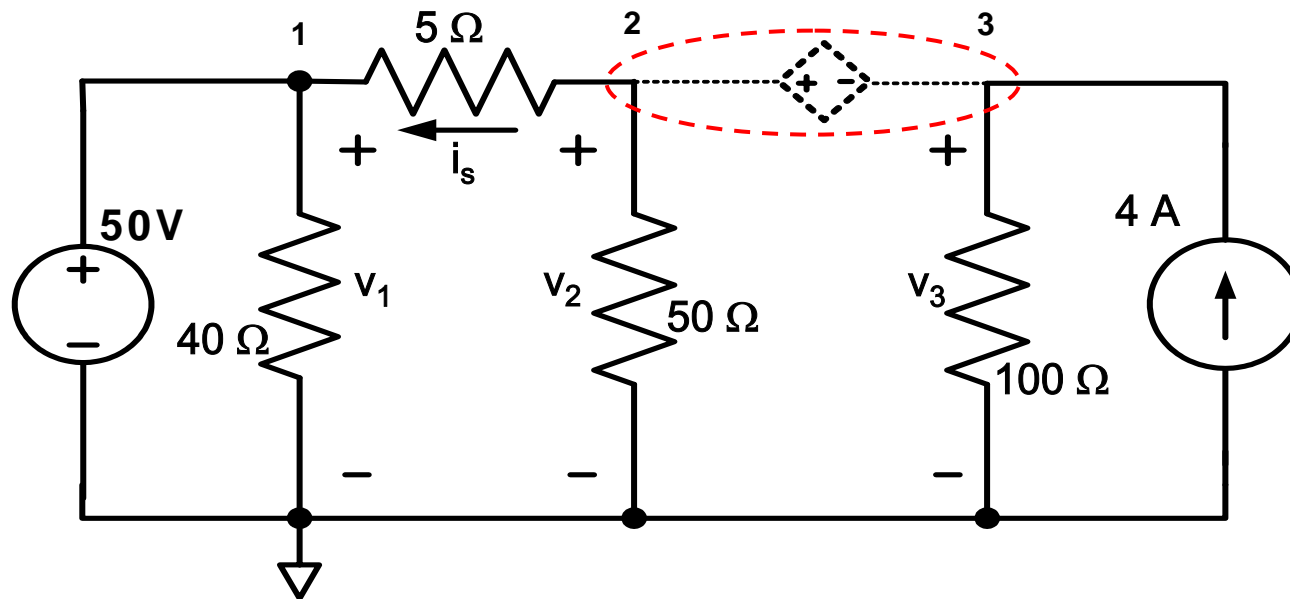
$$\left. \begin{aligned} (2) \quad & \frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + i = 0 \\ (3) \quad & \frac{v_3}{100} - i - 4 = 0 \end{aligned} \right\} \frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + \frac{v_3}{100} - 4 = 0;$$

(4) $v_3 = v_2 + 10i_s$

(5) $i_s = \frac{v_2 - 50}{5}$

5 ecuaciones, 5 incógnitas

Método de tensiones de nudo



$$v_1 = 50$$

$$\frac{v_2}{50} + \frac{v_3}{100} + \frac{v_2 - v_1}{5} - 4 = 0$$

$$v_3 = v_2 + 10i_s$$

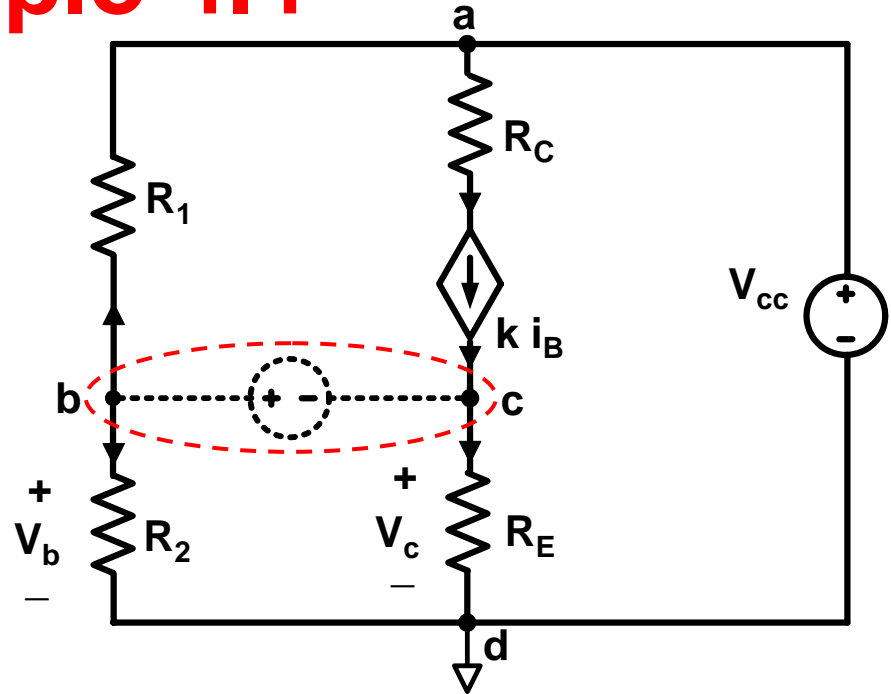
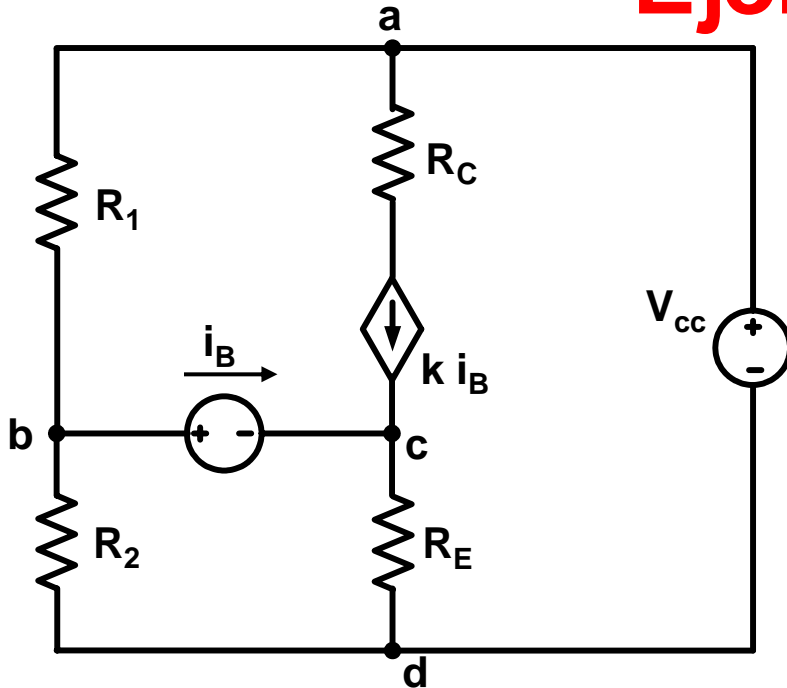
$$i_s = \frac{v_2 - v_1}{5}$$

Una fuente de tensión entre dos nudos da lugar a un supernudo

Supernudos y fuentes dependientes

1. Formular las ecuaciones de nudos ajenas a los supernudos
2. Formular las ecuaciones de los supernudos (tantas como supernudos)
3. Formular las ecuaciones de las fuentes de los supernudos (tantas como supernudos)
4. Formular las ecuaciones de las dependencias (tantas como fuentes dependientes)
5. Resolver el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a 1, 2, 3 y 4

Ejemplo 4.4



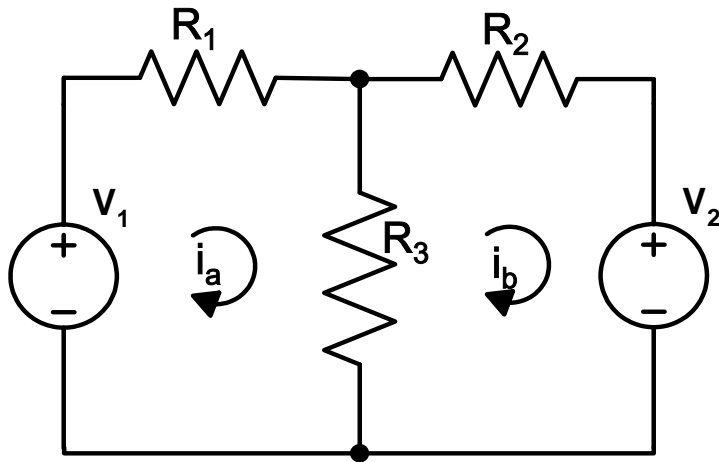
$$\begin{cases} \frac{v_b}{R_2} + \frac{v_b - V_{cc}}{R_1} + \frac{v_c}{R_E} - k i_B = 0 \\ v_c = (i_B + k i_B) R_E \\ v_c = v_b - V_0 \end{cases}$$

Incógnitas : v_b, v_c, i_B

Ecuaciones : 3

$$v_b = \frac{V_{cc} R_2 (1-k) R_E + V_0 R_1 R_2}{R_1 R_2 + (1-k) R_E (R_1 + R_2)}$$

Método de corrientes de malla



Las corrientes de malla conviene que vayan en el mismo sentido. Este método sólo es aplicable a circuitos planos

$$\begin{cases} V_1 - i_a R_1 - (i_a - i_b) R_3 = 0 \\ V_2 + i_b R_2 + (i_b - i_a) R_3 = 0 \end{cases}$$

Pasos

- **Identificar las mallas del circuito**
- **Definir las corrientes de malla (todas con el mismo sentido)**
- **Escribir la LKT para cada malla (casos especiales)**
- **Resolver el sistema y obtener las corrientes de malla**
- **Obtener las corrientes de rama a partir de las de malla**
- **Calcular las tensiones de nudo respecto a un nudo arbitrario de referencia**

Método de corrientes de malla

Expresión matricial

Matriz de resistencias de mallas:

- El elemento de la diagonal ii es la suma de las resistencias de la malla
- El elemento no diagonal ij tiene el valor de la resistencia entre las mallas i y j cambiada de signo

Método de corrientes de malla

Expresión matricial

$$\begin{aligned} i_a(R_1 + R_3) + i_b(-R_3) &= v_1 \\ i_a(-R_3) + i_b(R_2 + R_3) &= -v_2 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}$$

**Matriz de
resistencias
de malla**



**Vector de corrientes
de malla**



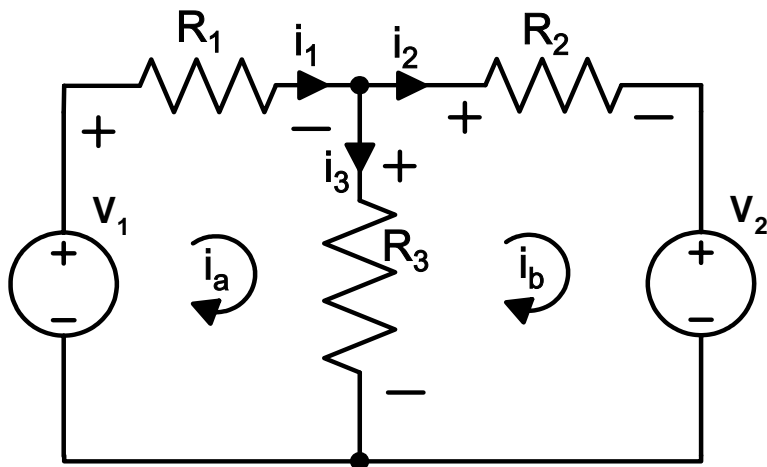
**Vector de
tensiones de
malla**



$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}$$

Método de corrientes de malla

Relación corrientes de rama y corrientes de malla



$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow i_3 = i_1 - i_2 \\ V_1 = i_1 R_1 + i_3 R_3 \\ -V_2 = i_2 R_2 - i_3 R_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 - i_1 R_1 - (i_1 - i_2) R_3 = 0 \\ V_2 + i_2 R_2 + (i_2 - i_1) R_3 = 0 \end{cases}$$

$$i_1 = i_a$$

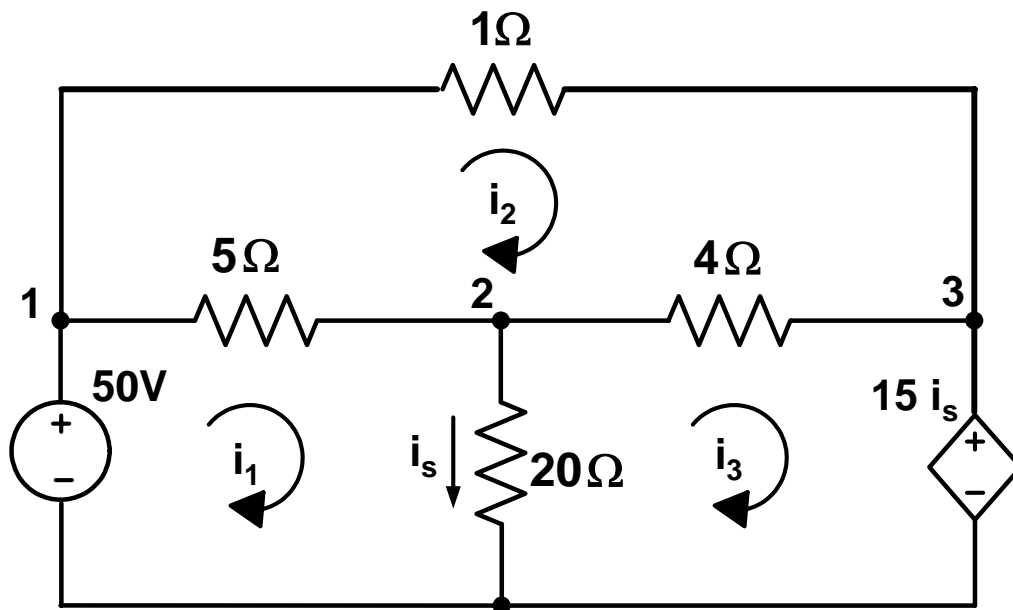
$$i_2 = i_b$$

$$i_3 = i_a - i_b$$

Método de corrientes de malla

Fuentes dependientes

Añadir a las ecuaciones de corrientes de malla las ecuaciones asociadas a las fuentes dependientes

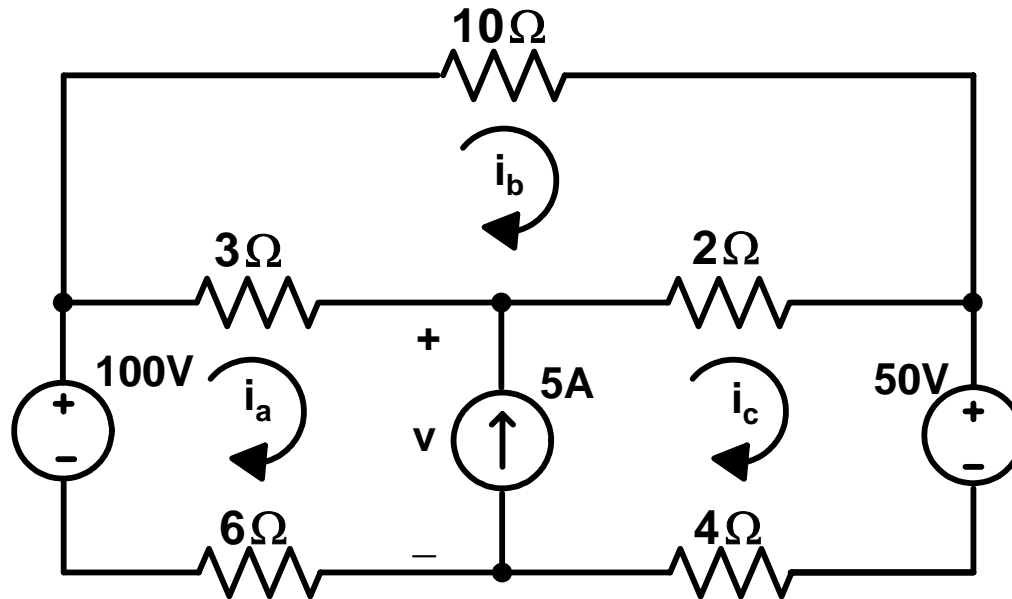


$$\begin{cases} 50 = 5(i_1 - i_2) + 20(i_1 - i_3) \\ 0 = 5(i_2 - i_1) + 1(i_2) + 4(i_2 - i_3) \\ 0 = 20(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) + 15i_s \end{cases}$$
$$i_s = i_1 - i_3$$

Método de corrientes de malla

Supermalla

Fuente de corriente en una rama \Rightarrow Supermalla



4 ecuaciones

4 incógnitas

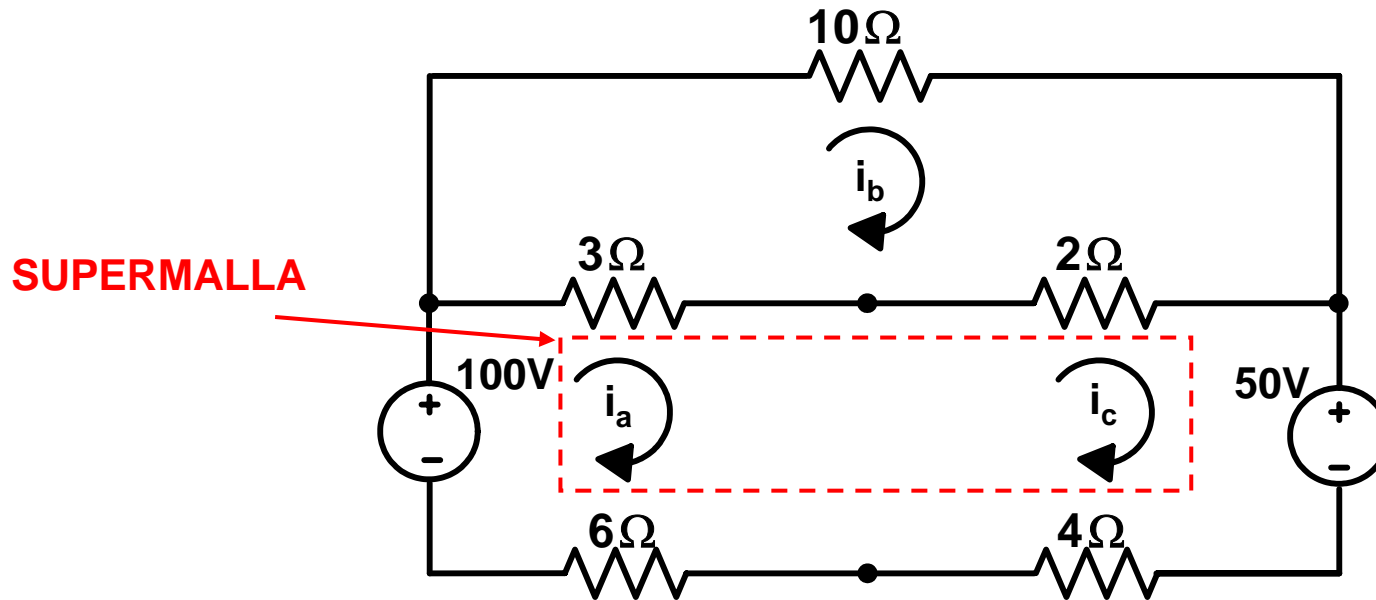
$$\left\{ \begin{array}{l} 100 = 3(i_a - i_b) + v + 6i_a \\ -50 = 4i_c - v + 2(i_c - i_b) \end{array} \right\} \quad 100 - 50 = 3(i_a - i_b) + 6i_a + 4i_c + 2(i_c - i_b)$$

$$0 = 3(i_b - i_a) + 10i_b + 2(i_b - i_c)$$

$$i_c - i_a = 5$$

Método de corrientes de malla

Supermalla



$$-100 + 3(i_a - i_b) + 2(i_c - i_b) + 50 + 4i_c + 6i_a = 0$$

$$50 = 9i_a - 5i_b + 6i_c$$

$$0 = 3(i_b - i_a) + 10i_b + 2(i_b - i_c)$$

$$i_c - i_a = 5$$

3 ecuaciones, 3 incógnitas

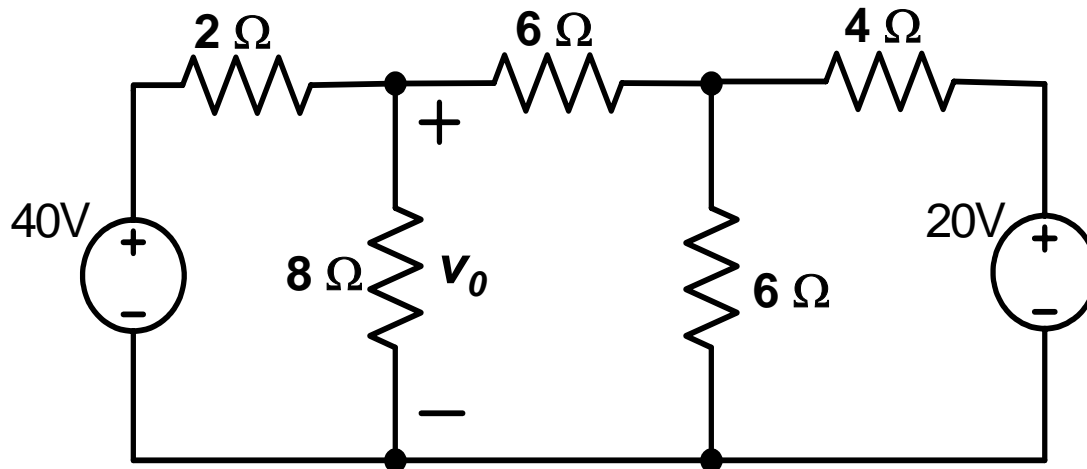
Supermallas y fuentes dependientes

1. Formular las ecuaciones de mallas ajenas a las supermallas
2. Formular las ecuaciones de las supermallas (tantas como supermallas)
3. Formular las ecuaciones de las fuentes de las supermallas (tantas como supermallas)
4. Formular las ecuaciones de las dependencias (tantas como fuentes dependientes)
5. Resolver el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a 1, 2, 3 y 4

¿Mallas o Nudos?

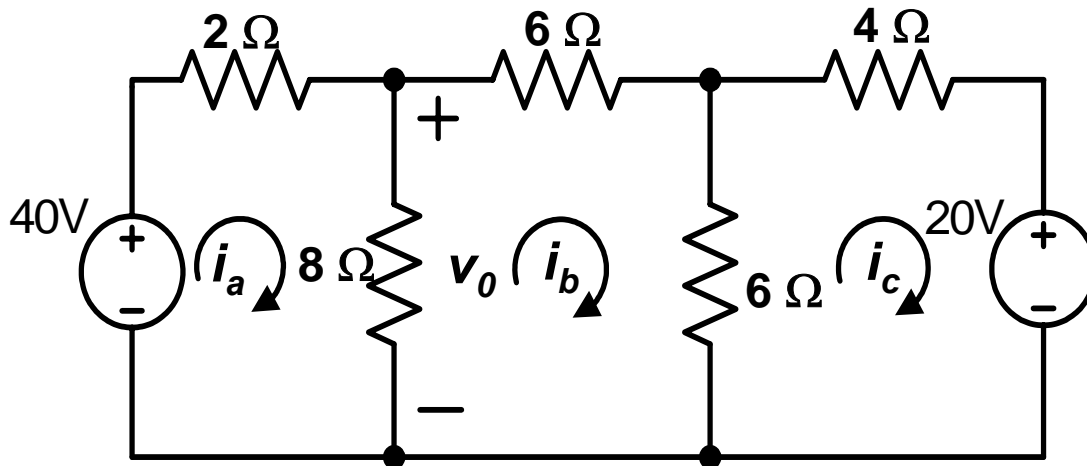
- Método que origine menor número de ecuaciones
- Si hay supernudos, quizá nudos
- Si hay supermallas, quizá mallas
- Si el circuito es de gran dimensión, el método que dé lugar al sistema de ecuaciones lineales más cuasivacio
- Si resolución parcial, el método más sencillo para esa resolución parcial

Ejemplo 4.5

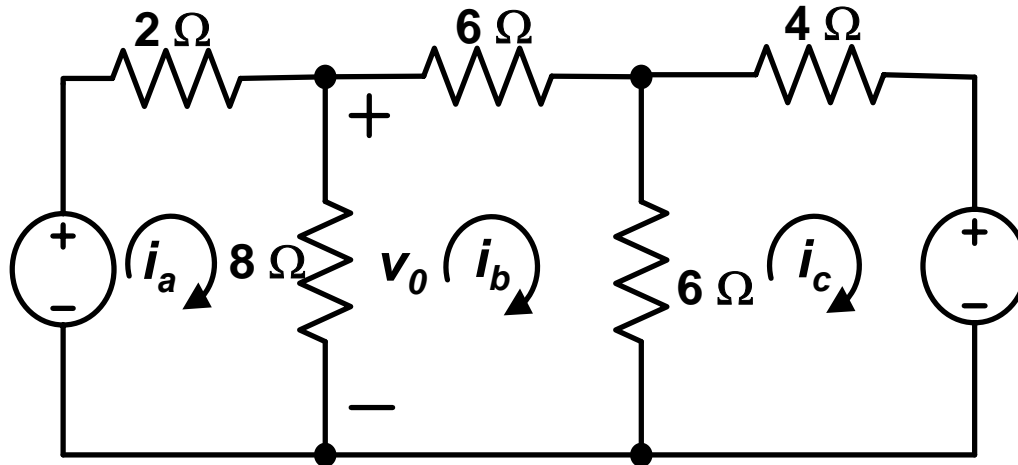


a) Resolver por mallas

b) Calcular v_0



Ejemplo 4.5 (I)



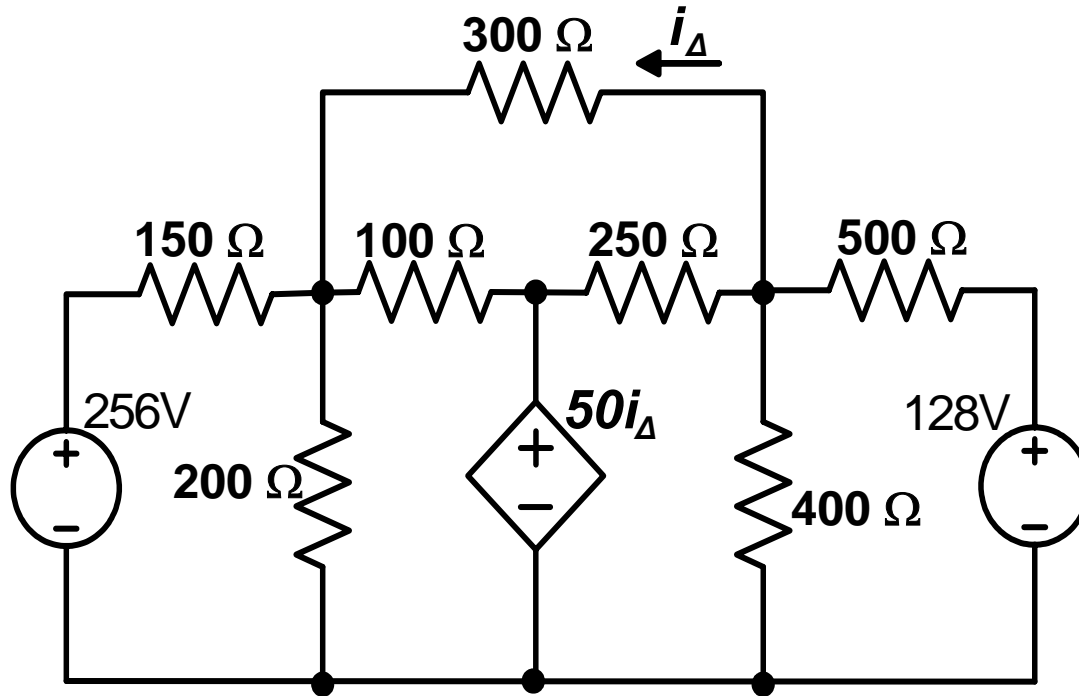
a)

$$\begin{cases} -40 + 2i_a + 8(i_a - i_b) = 0 \\ 8(i_b - i_a) + 6i_b + 40 - 40 = 0 \\ 6(i_c - i_b) + 4i_c + 20 = 0 \end{cases}$$

$$i_a = 5.6\text{A}, i_b = 2\text{A}, i_c = -0.8\text{A}$$

b) $v_0 = 8(i_a - i_b) = 28.8\text{V}$

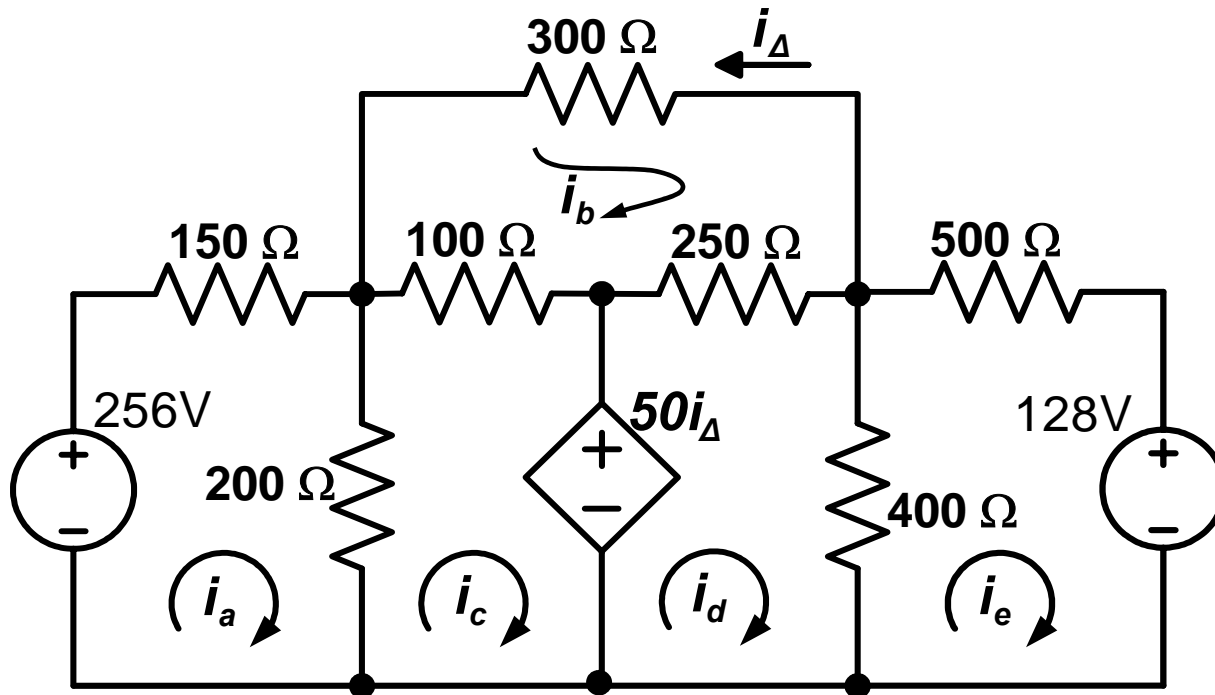
Ejemplo 4.6



¿ Nudos o mallas ?

Ejemplo 4.6 (I)

a) Mallas



Ecuaciones de Malla + $i_\Delta = -i_b$

Ejemplo 4.6 (II)

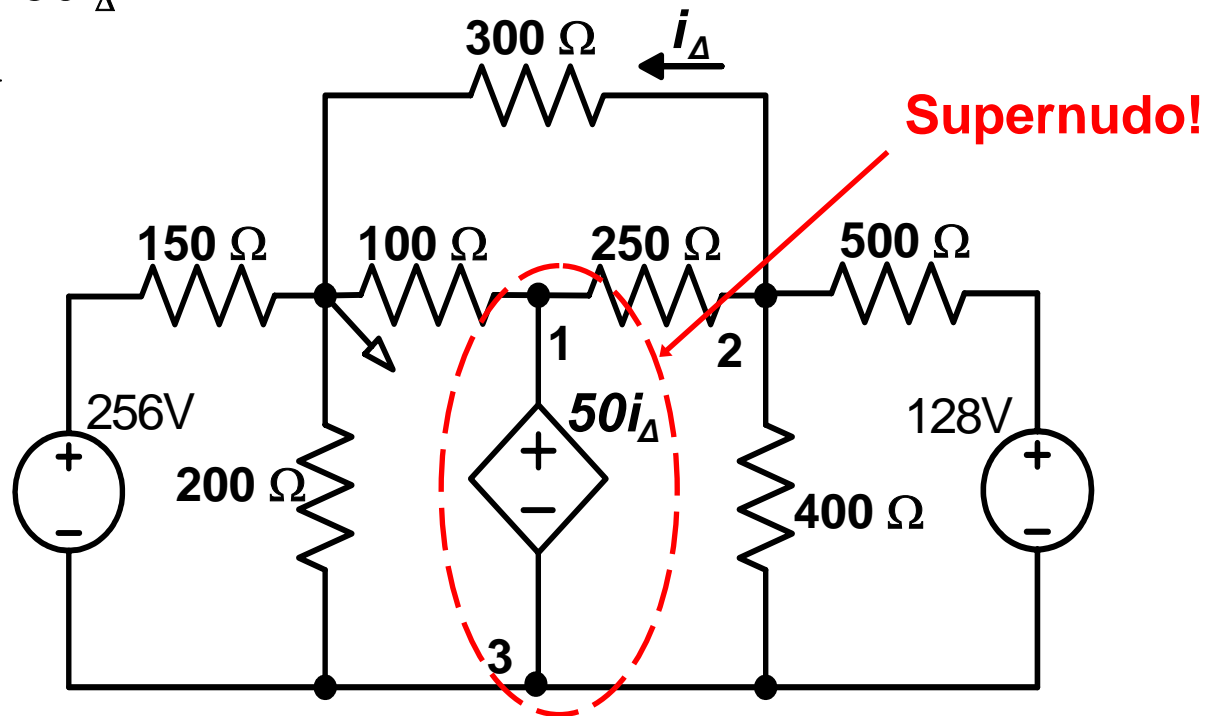
b) Nudos (1)

$$(1) \quad \frac{v_1}{100} + \frac{v_1 - v_2}{250} + \frac{v_3}{200} + \frac{v_3 - v_2}{400} + \frac{v_3 - (v_2 + 128)}{500} + \frac{v_3 + 256}{150} = 0$$

$$(2) \quad \frac{v_2}{300} + \frac{v_2 - v_1}{250} + \frac{v_2 - v_3}{400} + \frac{v_2 + 128 - v_3}{500} = 0$$

$$(3) \quad v_3 = v_1 - 50i_\Delta$$

$$(4) \quad i_\Delta = \frac{v_2}{300}$$



Ejemplo 4.6 (III)

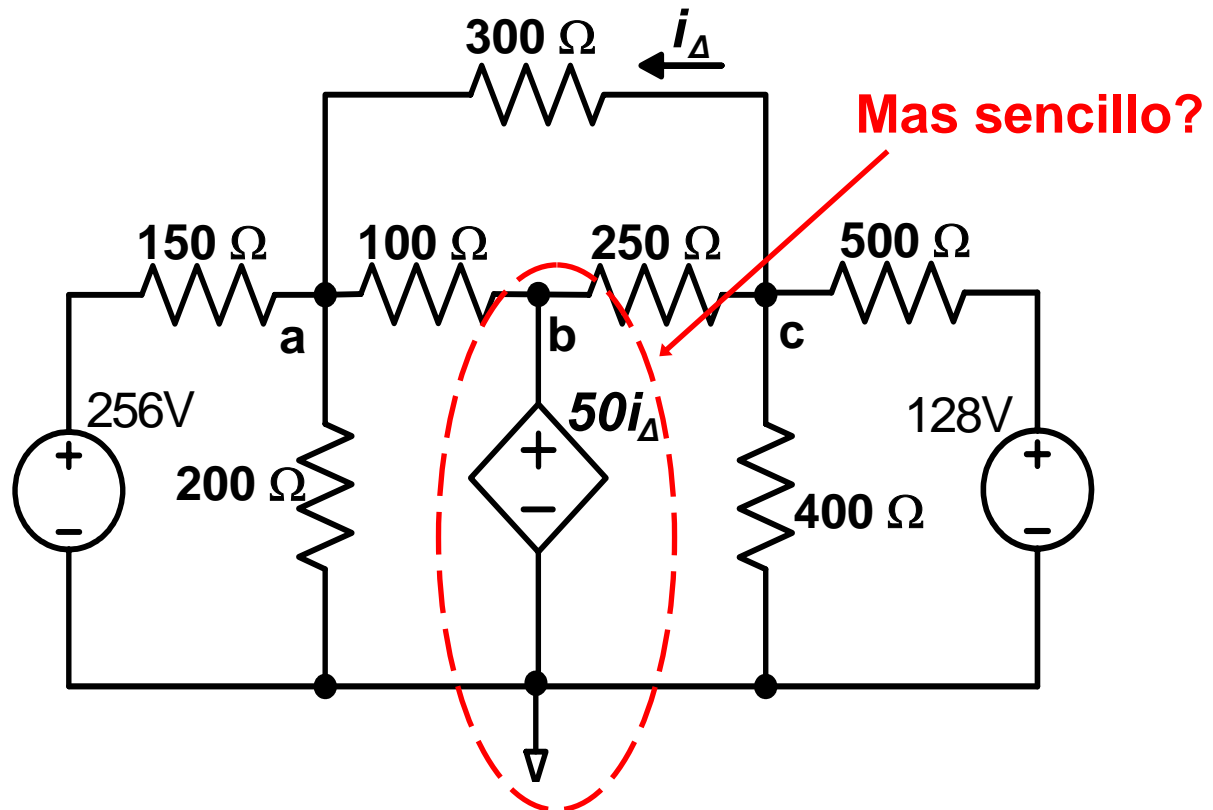
b) Nudos (2)

$$(1) \quad \frac{V_a}{200} + \frac{V_a - 256}{150} + \frac{V_a - V_b}{100} + \frac{V_a - V_c}{300} = 0$$

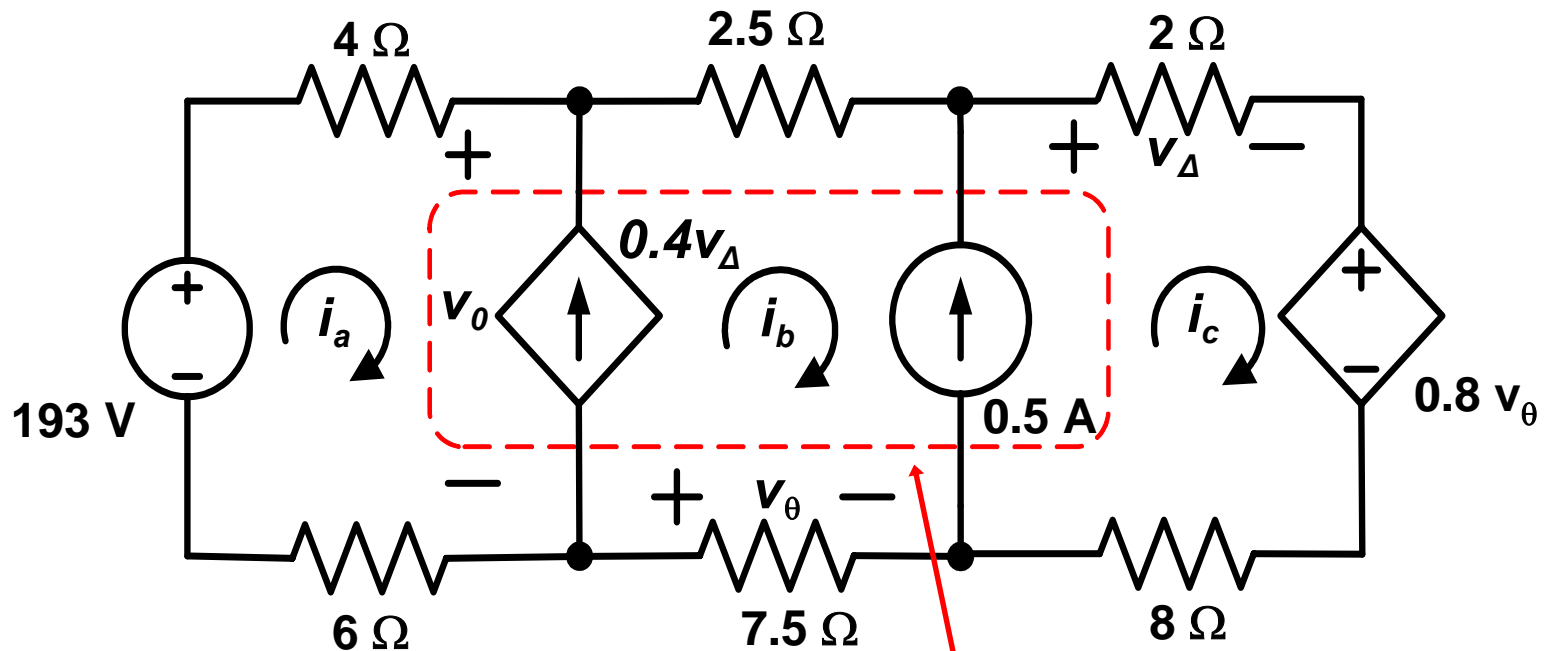
$$(2) \quad \frac{V_c}{400} + \frac{V_c - 128}{500} + \frac{V_c - V_b}{250} + \frac{V_c - V_a}{300} = 0$$

$$(3) \quad V_b = 50i_\Delta$$

$$(4) \quad i_\Delta = \frac{V_c - V_a}{300}$$



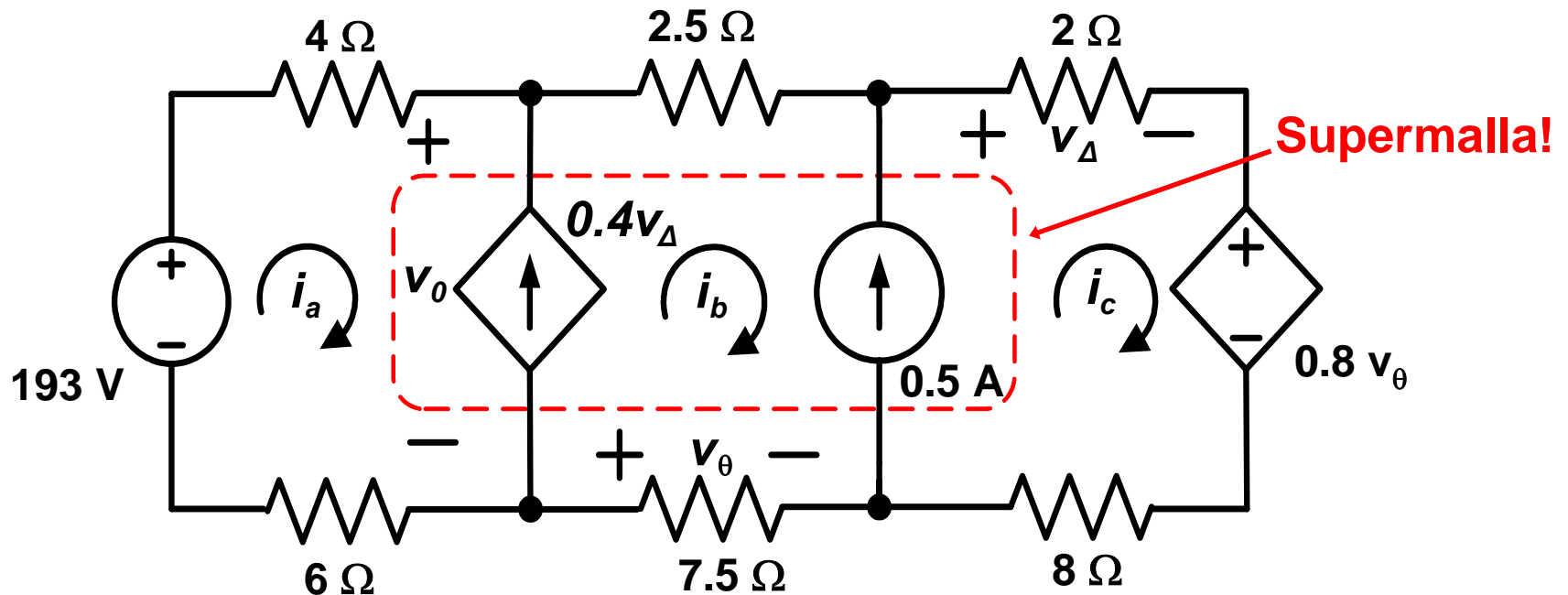
Ejemplo 4.7



Supermalla!

¿ Nudos o mallas ?

Ejemplo 4.7 (I)



Mallas (supermalla)

$$193 = 10i_a + 10i_b + 10i_c + 0.8v_\theta$$

$$i_b - i_a = 0.4v_\Delta$$

$$i_c - i_b = 0.5$$

$$v_\Delta = 2i_c$$

$$v_\theta = -7.5i_b$$

5 E
5 I

Ejemplo 4.7 (II)

a) Nudos

$$(1) \quad \frac{v_0 - 193}{10} - 0.4v_\Delta + \frac{v_0 - v_a}{2.5} = 0$$

$$(2) \quad \frac{v_a - v_0}{2.5} - 0.5 + \frac{v_a - (v_b + 0.8v_\theta)}{10} = 0$$

$$(3) \quad \frac{v_b}{7.5} + 0.5 + \frac{v_b + 0.8v_\theta - v_a}{10} = 0$$

$$(4) \quad v_\theta = -v_b$$

$$(5) \quad v_\Delta = \frac{v_a - (v_b + 0.8v_\theta)}{10} 2$$

No es un
supernudo!

